DOI：10.16285/j.rsm.2023.1397

三维有限元中奇异点源的简化分析方法

潘 泓[1,2]，许嘉显[1,2]，骆冠勇[1,2]，彭斯格[1,2]，曹 洪[1,2]

（1. 华南理工大学 土木与交通学院，广东 广州 510640；2. 华南理工大学 亚热带建筑科学国家重点实验室，广东 广州 510640）

摘 要：减压井是渗流控制的重要手段，减压浅井井底的入渗量不可忽略。在渗流场有限元有关井的计算中，含水层与井半径有巨大尺寸差异，只有将井周围的网格尺寸限制在厘米级或更少，才能达到合理的精度，但效率过低。为提高效率，分析时通常将井底简化为点源。由于点源附近的水头梯度极大，是奇异点，有限元中通常要进行等效处理才能保证全局的精度。提出了以零体积点元模拟点源的方法，该方法基于修正井水位法，利用点源解析解及四面体渗流单元，推导了点元单元的显式解。使用该点元单元模拟井底，可以在不失全局精度的条件下用大网格对点源进行模拟，避免了迭代计算，极大提高了利用三维有限元模拟点源的效率。详细介绍了该点元显式解的推导过程，验证其计算精度，并探究出简化计算方法的适用范围。最后介绍了该方法在实际排水减压抗浮工程中的应用。

关 键 词：渗流；有限元法；井点；奇异点单元

中图分类号：TU 46+3 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－7598 (2024) 08－2483－09

Simplified analysis method of singular point source in three-dimensional finite element calculation

PAN Hong[1,2], XU Jia-xian[1,2], LUO Guan-yong[1,2], PENG Si-ge[1,2], CAO Hong[1,2]

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China;
2. State Key Laboratory of Subtropical Building Science, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

Abstract: Relief wells are an important means of seepage control, and the infiltration at the bottom of shallow relief wells cannot be ignored. When utilizing the finite element method for seepage field analysis in relation to wells, a significant disparity exists between the aquifer's dimensions and the well's radius. Achieving reasonable accuracy necessitates limiting the mesh size around the well to centimeters or less, albeit at the cost of reduced efficiency. To enhance efficiency, the well bottom is commonly approximated as a point source in analytical models. The head gradient near the point source is extremely large, which is a singular point. In the finite element method, equivalent treatment is usually required to ensure the global accuracy. This paper presents a method for simulating point sources with zero-volume point elements which is based on the correction well water level method, the method uses the point source analytical solution and the tetrahedral seepage element to deduce the explicit solution of the point source element. By using this point source element to simulate the bottom of well, the point source can be simulated by using a large grid without losing the global accuracy, which greatly improves the efficiency of simulating the point source by using the three-dimensional finite element. The paper thoroughly outlines the derivation process for the explicit solution of the point element, verifies its calculation accuracy, and investigates the applicability range of simplified calculation methods. Lastly, the practical application of this method in drainage decompression and anti-floating engineering is presented.

Keywords: seepage; finite element method; well point; singular point element

1 引 言

防渗墙、减压井及排渗沟等阻排水结构通常是渗流场控制流态的主要手段，对这些阻排水结构进行准确的模拟分析非常重要。但由于这些结构物的尺寸与渗流场的尺度相差好几个数量级，三维有限

收稿日期：2023-09-18 录用日期：2023-12-04
基金项目：国家自然科学基金（No. 52308353，No. 51978282）；广东省自然科学基金（No. 2023A1515011571，No. 2023A1515011683）；华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室开放研究项目（No. 2022ZB21）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52308353, 51978282), the Natural Science Foundation of Guangdong Province (2023A1515011571, 2023A1515011683) and the Open Fund of State Key Laboratory of Subtropical Building Science, South China University of Technology (2022ZB21).
第一作者简介：潘泓，男，1967 年生，博士，教授，主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: hpan@scut.edu.cn
通讯作者：骆冠勇，男，1979 年生，博士，副教授，主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: luogy@scut.edu.cn

元中采用等维的方法进行模拟时，只有阻排水结构周边的网格尺寸小于其特征尺寸时，才能达到合理的精度，但效率过低，消耗过多的计算资源[1]。为提高计算效率，通常对这些结构物进行等效或降维处理。

目前关于阻排水结构等效降维的简化研究，曹洪等[2]针对悬挂式结构体采用阻力系数法，将二维绕渗等效为一维流动进行处理。Luo 等[3]在悬挂式结构体周边引入一层无厚度界面接触单元，将三维的防渗墙等效成二维的面，解决了竖向绕流带来较大误差的问题。Luo[4]、Cao[5]等针对城区渗流场的地下结构细小间隙通道采用降维方法，把三维细小通道等效成二维线单元，通过修正导水矩阵使其在疏松网格下建模也能保证全局精度。Hu[6]、Daviau[7]、Ozkan[8]、Goode[9]等针对双孔隙介质中水平井渗滤流量分析，采用均匀汇线法将水平井视为由有限数量的点源组成的线源。首先对点源模型进行求解，然后通过沿点源解叠加积分得到线源的解。Fipps 等[10]采用的以点代井法，将井降维成网格节点处理，网格尺寸对流量计算结果影响很小。Dotlić 等[11-12]为了计算模拟径向井侧的水头损失，从井侧等效引入一维横向线单元与三维单元边缘重合，通过导水矩阵来修正水头损失误差，采用近井校正法（Near-well correction），将水头表示为对数函数和线性函数之和来校正近井奇异点区域中的通量，在稀疏网格的情况下结果是二阶精确的。Berrone[13]和 Laurino[14]等提出新数值方法，用于处理模拟细小管状物降维带来的三维和一维椭圆方程耦合问题，降低了用一维建模近似模拟细小管状物带来的误差。Mai 等[15]用降维等效把根系结构简化为各段一维单元，对每个根段调用单根模型来计算，把结果反馈宏观尺度模型，有效地解决了根表面附近梯度过大的问题。Zhou 等[16]为了解决分支井间的相互干扰导致复杂渗流的问题，采用了线源叠加法，先把分支井降维成二维的分支线，然后针对每条线的流量进行叠加组合。Koch 等[17-18]引入了一种新的各向异性多孔介质中单相流的井模型，井与多孔介质之间的质量交换通过小邻域上的空间分布源项进行建模，提高了井流量的准确性。毛昶熙[19]和关锦荷[20]等基于井数多，井距小的井列渗流场采用的以沟代井列等效法，计算出一定距离的水位分布，优点是节省了对每个井进行有限元分析的麻烦，但对井旁和井间的水位未知。

以上研究主要针对防渗墙、井筒、排水廊道等，对三维问题中奇异点源的简化模拟问题研究较少。但对于浅井，其底部入渗所占的比例比较大，其准确分析计算就比较重要了。对于浅井底部，通常可视为球对称的点源。对于点源的三维有限元简化模拟，毛昶熙[21]和李祖贻[22]等考虑了忽略井径导致的奇异点的问题，在井周等效剖分为 4 个等腰直角三角形，如图 1 所示，l 为网格间距，通过对比解析解和有限元表达式令流量相等，得到等效半径和实际井半径的水头差，通过修正水头差可反映实际的水头分布。但以上研究针对的是规则的四面体网格，这给其应用带来了不便。

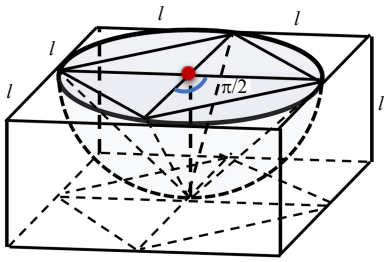


图 1 规则四面体网格划分的井底

Fig.1 Regular tetrahedral meshing of the well bottom

本文针对一般的四面体网格，基于修正井水位方法[23]，提出一种专门模拟奇异点源的单元，利用该单元可以有效便捷地实现三维有限元中奇异点源的模拟。利用该点元单元，在不失全局精度的条件下，利用大网格对点源进行模拟，避免了迭代计算，极大提高了利用三维有限元模拟点源的效率。

2 三维有限元点元模拟简化分析方法

2.1 基本假定及思路

三维有限元点元模拟简化分析方法的推导假定如下：

（1）点源附近渗透率各向同性。

（2）点源附近满足球对称流条件。

（3）渗流场为恒定渗流。

满足上述假定的球状流解析解[24]为

$$Q_{\mathrm{a}}=2\pi K(H_{\mathrm{R}}-h_{\mathrm{w}})/\left(\frac{1}{r_{\mathrm{w}}}-\frac{1}{R}\right) \tag{1}$$

式中：Q_{a} 为点源流量；K 为渗透系数；H_{R}、R 为边界水头和边界半径；h_{w}、r_{w} 为半球出逸面水头和半径。

基本思路：当把一个小尺度的定水头边界球状流降维为一个定水头边界点源模拟时，如图 2 所示，其实际效果相当于一个半径为 r_{e} 的球状流，比

如当点源周边采用如图 1 所示规则网格时，采用中断面法进行节点流量计算时，其等效半径为 $r_e = 3l/(4\pi+3)$ [21-22]。等效球状流比真实球状流缺失了蓝色碗状区域渗流路径，通过用附加阻力弥补因等效而损失的该段流动阻力，使得用点源模拟流量计算与真实半球面计算一致。

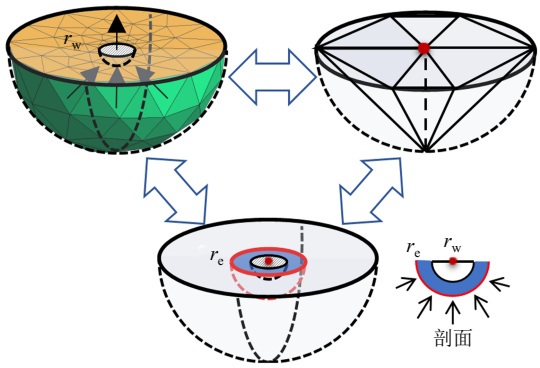


图 2　利用点单元模拟球状流
Fig.2　Using point element to simulate spherical flow

很明显，r_e 取决于点源周边四面体单元的大小和形状。当网格较大时，等效的半径 r_e 会大于 r_w，计算出的流量比实际流量偏大；而当网格较小时，r_e 会小于 r_w，计算流量比实际流量小。

图 3 给出用点源直接模拟球状流的误差分布。从图中可以看出，简单地直接降维不作任何处理，计算流量误差受网格大小影响非常大，而且加密网格流量误差并不收敛，并不能解决问题。而实际工程中所采用的网格通常远大于点源半径，流量误差为负，流动阻力偏小。因此本文主要目标是提出一个适当点元单元，增加点源附近流动阻力，以弥补用大网格模拟点源时阻力偏小的问题。为了计算出附加阻力大小，需要得到点源简化后水头和流量的关系。其推导过程如下节所述。

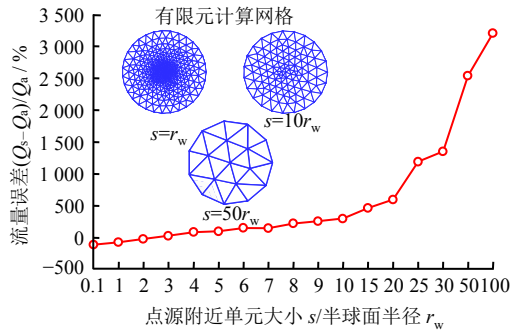


图 3　直接用点源模拟球状流的误差
Fig.3　Error of simulating spherical flow directly with point source

2.2　奇异点元显式公式的推导

用点源模拟半球面，在附近划分不同的 n 个四面体单元时，取其中一个四面体计算，如图 4 所示。该四面体 4 个点分别为 i，j，k，m，其中 i 为点源，α_i 为 i 点对应三角形面 jkm 的立体角。

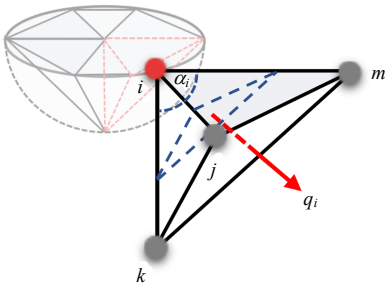


图 4　四面体单元
Fig.4　Tetrahedral unit

当假定渗透是各向同性时，根据有限元计算求得单元流量：

$$q_e = \frac{-K}{36V}\begin{bmatrix} b_i & c_i & d_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_m \\ c_i & c_j & c_k & c_m \\ d_i & d_j & d_k & d_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \\ H_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中：V 为单元体积；H_i、H_j、H_k、H_m 为对应点计算水头；b_i、c_i、d_i、b_j、c_j、d_j、b_k、c_k、d_k、b_m、c_m、d_m 见文献[25]中对应公式。

根据球对称假定及半球面井水头公式（1），有

$$\left.\begin{aligned} H_j &= \frac{q_i\beta_j}{Kr_w\alpha_i} + H_w,\ H_k = \frac{q_i\beta_k}{Kr_w\alpha_i} + H_w \\ H_m &= \frac{q_i\beta_m}{Kr_w\alpha_i} + H_w,\ \beta_i = \frac{l_i - r_w}{l_i} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中：H_w 为井水位；l_i 为单元对应边长度。

将式(3)代入式(2)，得到水头差 $H_{iw} = H_i - H_w$ 与流量 q_i 的关系为

$$H_{iw} = \frac{q_i\,(-36V_i r_w\alpha_i + S_b)}{r_w\alpha_i KS_i} \tag{4}$$

式中：S_i、S_b 为

$$\left.\begin{aligned} S_i &= b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 \\ S_b &= -\beta_m(b_ib_m + c_ic_m + d_id_m) - \beta_k(b_ib_k + c_ic_k + \\ &\quad d_id_k) - \beta_j(b_ib_j + c_ic_j + d_id_j) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

假定流量均匀分布，则有总流量 Q 与 q_i 的关系：

$$\frac{q_i}{\alpha_i}=\frac{Q}{2\pi} \tag{6}$$

代入得

$$H_{iw}=\frac{Q}{2\pi r_w K}\frac{(S_b-36V_i r_w\alpha_i)}{S_i} \tag{7}$$

式（7）物理意义为，为保证有限元计算所得的流量与解析解相同，必须调整点源的水头 $H_i=H_w+H_{iw}$。

式（7）仅是根据点源周边一个单元所得到的井水位修正量。当考虑点源周边所有的单元时，H_{iw} 可通过各单元修正量按立体角占比加权平均得到，即

$$\mathrm{d}H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{2\pi}H_{iw}\right)=\frac{Q}{4\pi^2 r_w K}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i(S_b-36V_i r_w\alpha_i)}{S_i}\right) \tag{8}$$

该式为适应一般网络划分的修正公式，特别地，当采用同图一规则四面体网格划分时，即 $a_i=\pi/2$，$l_j=l_k=l_m=l$ 时，有

$$\mathrm{d}H=\frac{Q}{2\pi K}\left(\frac{1}{r_w}-\frac{3\pi+3}{3l}\right) \tag{9}$$

值得注意的是，式（9）的等效半径为 $r_e=3l/(3\pi+3)$，结果与毛昶熙[21]和李祖贻[22]等规则四面体网格划分的等效半径 $r_e=3l/(4\pi+3)$ 有所差别。原因在于毛昶熙和李祖贻选取中断面法进行节点流量的计算，而当直接采用有限元式（2）进行节点流量时，实际是采用正对节点断面面积的 1/3 计算[26]，精度更高。

3 奇异点元算法在有限元程序中的实现

从第 2 章公式中可以看出，dH 是 Q 的线性函数，于是可以表示为 $D\mathrm{d}h=Q$，D 是与点源周边单元划分相关的常数。有限元程序中为了解释修正水位的水头损失 dH，需要在点源处引入奇异点单元，如图 5 所示，该单元实际长度为 0，两端的节点在空间上是重叠状态。单元的一端为点源的平均水头（i 节点），是程序待求的水头，一端为半球流水头（p 节点），两端水头差调整为 dH。奇异点单元的主要作用是修正零体积点元模拟三维球状流引起的误差，通过在总渗透矩阵中添加导水矩阵，增加额外渗流路径使得流量与解析解相同。以下为导水矩阵推导：

奇异点单元的流量表达式为

$$Q=D_i(H_i-H_p) \tag{10}$$

通过式（8）得

$$D_i=\frac{4\pi^2 r_w K}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i(S_b-36V_i r_w\alpha_i)}{S_i}\right)} \tag{11}$$

其矩阵形式为

$$D_i\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}H_i\\ H_p\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Q_i\\ Q_p\end{Bmatrix} \tag{12}$$

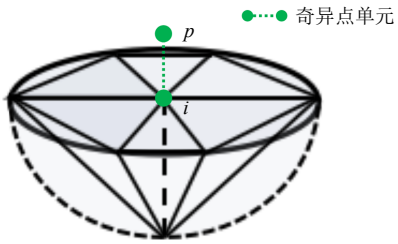


图 5 奇异点单元示意图

Fig.5 Schematic diagram of singular point unit

然后把附加阻力对 i、p 节点的影响添加到总渗透矩阵中，附加阻力的影响只针对 i、p 节点计算进行修正，不影响其他单元的计算。而且导水矩阵组装在总渗透矩阵中，可以随时添加修改，具有计算方便的优点。

4 算例验证分析

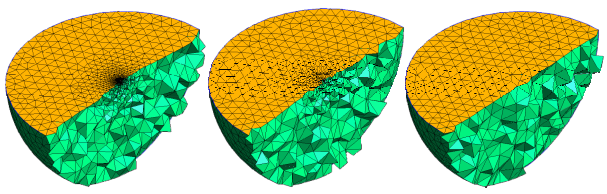
上述算法已经编入三维有限元计算程序[27]。下面通过两个算例分析简化方法的效率与精度。

4.1 单井算例

计算中整个模型为半球体，采用单一土层，渗透系数 $K=1$ m/d。半球出溢面井半径 $r_w=0.1$ m；外边界 $R=100$ m。半球出逸面水头为 0 m，位于半球体球心处；外边界水头为 1 m。

4.1.1 水头结果对比

将网格划分分为 3 种类型，分别是 0.1 倍井径网格划分、10 倍井径网格划分、100 倍井径网格划分，如图 6 所示，s 为井周网格尺寸大小。



(a) s=0.1r_w 单元数: 46 491 节点数: 7 988

(b) s=10r_w 单元数: 17 431 节点数: 3 080

(c) s=100r_w 单元数: 12 447 节点数: 2 234

图 6 单井模型网格划分对比

Fig.6 Meshing comparison of single well model

通过对比 3 种方法不同网格划分的水头分布情况，从图 7 可以看出，在相同倍数井径单元尺寸的条件下，简化方法水头分布比常规方法和不修正的精度更高，水头均在第 1 个节点后基本与解析解相吻合。这体现了奇异点元法的特点，即放弃井点水头的准确性来保证后面井周水头的准确性。在实际工程中井周附近的水头大小往往是人们更加关心的结果，因此采用奇异点元法，井周附近的水头可以得到较为精确的结果。

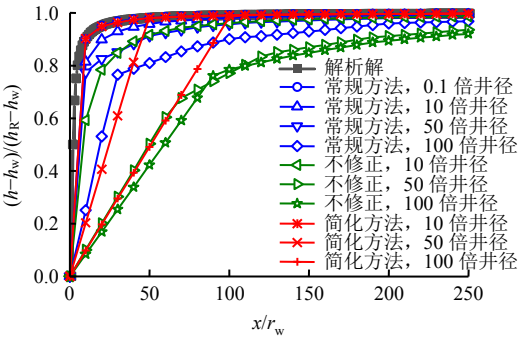


图 7　水位分布曲线图

Fig.7　Water level distribution curves

4.1.2 流量结果对比

通过对比分析过井流量与解析解的相对误差，可以发现常规模型需要将单元尺寸细分到 0.1 倍井径左右，才能把误差降低到 3%以内，说明常规模型网格密度对结果影响大。而简化模型的单元尺寸大小与流量计算误差关系不大，整体最大误差不超过 5.24%。分别对比常规模型和简化模型最接近解析解流量时的单元尺寸，简化模型即使在单元尺寸为 100 倍井径的情况时流量相对误差仍与解析解十分接近，比常规模型 0.1 倍井径更有优势。

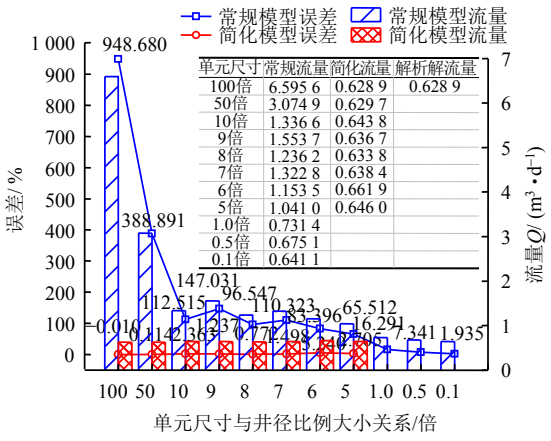


图 8　流量误差比较

Fig.8　Flow error comparison

但应当指出，在网格尺寸小于 5 倍半径时，即 $l<5r_w$ 时，有 $1/r_e<(3\pi+3)/3l$，根据式（9）计算导水矩阵为非正定矩阵，导致流量与水头差呈负相关，计算出现奇异。而且实际工程中所采用的网格通常远大于点源半径的 5 倍，因此简化方法舍去小于 5 倍半径的情况。

4.2　多井算例

计算中整个模型为长宽各 60 m、高 1 m 的长方体，采用单一土层，渗透系数 $K=1$ m/d。半球出逸面半径 $r_w=0.1$ m，半球出逸面水头为 0 m，模型左边界水头为 1 m，右边界水头为 2 m，5 个半球面井布置位置如图 9 所示。

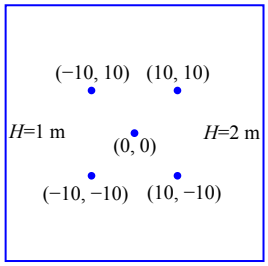


图 9　多井模型示意图

Fig.9　Schematic diagram of multi-well model

与单井模型分析类似，将网格划分分为 3 种类型，如图 10 所示，其中水位分布见图 11，流量结果对比见表 1。

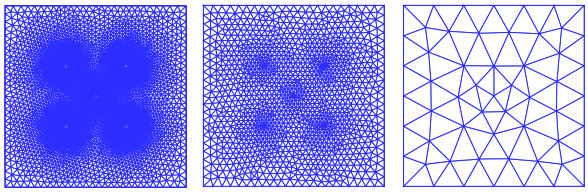


图 10　多井模型网格划分对比

Fig.10　Meshing comparison of multi-well model

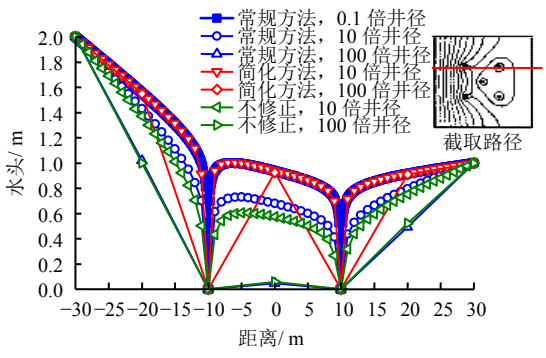


图 11　截面水位分布曲线

Fig.11　Section water level distribution curves

表 1 不同网格划分计算流量相对误差比较

Table 1 Comparison of the relative error of flow rate calculated by different grid divisions

网格划分类型	半球面井流量 Q / ($m^3 \cdot d^{-1}$)	相对误差/ % （与常规 0.1 倍比较）
常规 0.1 倍井径	2.858	0.000
常规 10 倍井径	4.201	46.990
简化 10 倍井径	2.849	0.315
不修正 10 倍井径	4.741	65.800
常规 100 倍井径	8.266	189.200
简化 100 倍井径	2.935	2.700
不修正 100 倍井径	7.956	178.300

对于一个模型含有数量较多的井时，以常规方法 0.1 倍井径划分网格的流量作为参考值，纵向对比网格尺寸为 10 倍甚至 100 倍井径时，计算误差很大，可以看出常规方法对于网格密度的要求较高。而横向对比相同单元尺寸奇异点元法流量误差小，仍然保持较高的精度，从水位分布曲线上看从第一个节点后水头几乎与参考值重合，显示出简化法计算效率高、精度高的优势。

4.3 边界及井间距的影响

为了探究奇异点元法计算适用范围，这里针对井距离模型边界和井间距两个影响因素进行分析。通过控制变量找出简化方法流量误差收敛的范围。

井边界模型以井距离模型边界 d_1 与点源半径 r 比值作为变量；井间距模型以井间距距离 d_2 与点源半径 r 比值作为变量。

从图 12 可以看出，当 d_1 或 d_2 大于点源半径 r 的 5 倍时，模型边界和井间距带来的误差影响收敛至 ± 5%以内并趋于稳定。因此需要留意在使用奇异点元法计算时，流量在井与模型边界间距或井与井间距大于井径 5 倍以上的适用范围时误差较小。在实际工程中井间距通常大于井径的 10 倍甚至 100 倍以上，满足点源附近球对称流的假定。因此采用奇异点元法，流量计算可以满足实际工程需求。

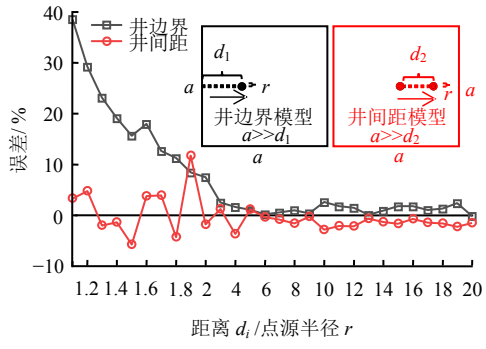


图 12 流量误差比较

Fig.12 Flow error comparison

5 奇异点元法在地下结构排水减压抗浮分析中的应用

本场地位于广州增城广汕公路，项目总用地面积 60 705 m^2，场地所在地为冲积平原地貌，北面为凤岗、万古岭等小山岗，东侧为凤岭，南侧约 400 m 为西北−东南流向的西福河，其渗流计算区域如图 13 所示。其中地下结构占地面积 32 101.6 m，长 116.1 m，宽 276.5 m；场地平均高程 12.0 m，地下室底板面标高为+1.0 m，底板厚 0.6 m，地下室底板在砂层。抗浮设计水位为+14.5 m；实测地下稳定水位埋深为 2.50～5.00 m，平均埋深 3.72 m，标高为 6.00～8.95 m，平均标高为 7.63 m。根据地质资料，项目所在地主要土层为素填土+粉土+中砂，素填土平均厚度 3.2 m，粉土平均厚度 5.7 m，中砂平均厚度 10.34 m。具体土层渗透系数如图 14 所示。

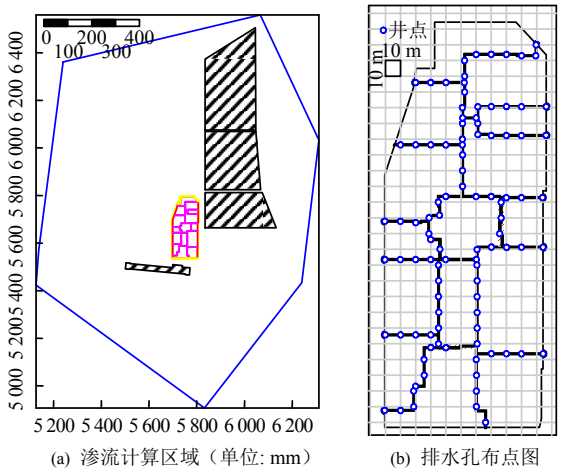


图 13 渗流计算区域及排水孔布点图

Fig.13 Seepage calculation area and layout of drainage holes

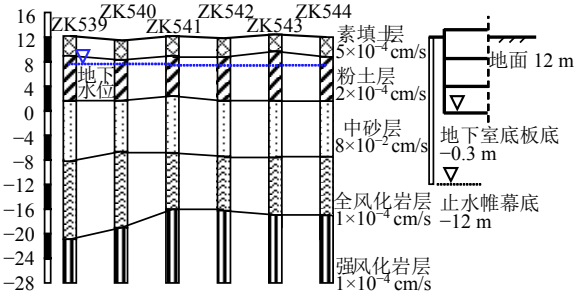


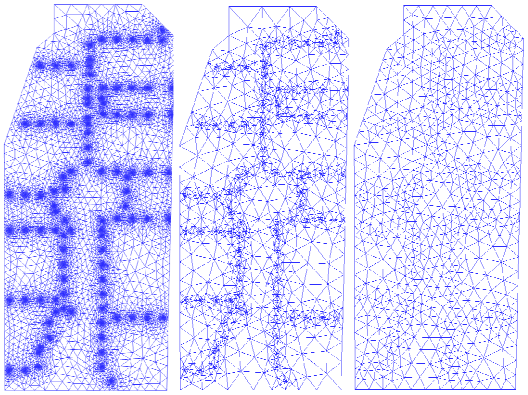
图 14 地质剖面图

Fig.14 Geologic profile

由于项目在施工完地下室顶板后停工缓建，现有的结构自重不足以抵抗现有水压力。按设计复核，要满足目前的结构抗浮安全，地下水位必须控制在

负一层底板 8.1 m 处以下。具体排水减压方案是沿各后浇带走向，每隔 10 m 进行钻孔，孔半径 50 mm，如图 13 所示。本章均按西福河边界水头 6 m、凤岭边界水头 8 m 标准工况和暴雨工况计算，且假定后浇带排水通畅。

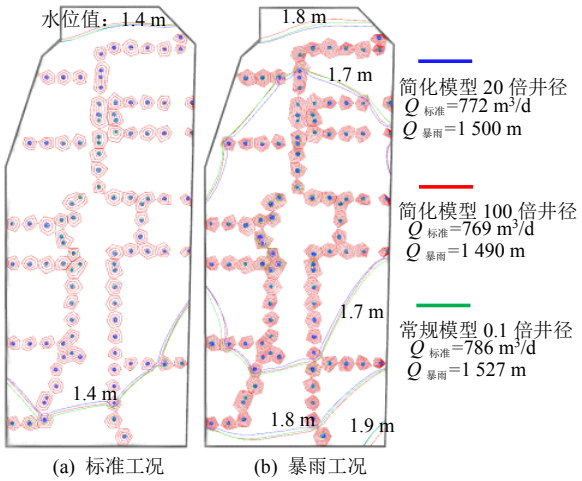
通过对比 3 种类型网格划分结果，如图 15 所示。分别为常规模型 0.1 倍井径、简化模型 20 倍井径和简化模型 100 倍井径，分别对应有 1 847 290、203 905、168 155 个单元数量。



(a) 常规模型 s=0.1r_w (b) 简化模型 s=20r_w (c) 简化模型 s=100r_w
单元数: 1 847 290　　单元数: 203 9050　　单元数: 168 155
节点数: 306 032　　节点数: 29 896　　节点数: 24 540

图 15　工程案例网格划分对比
Fig.15　Meshing comparison of engineering case

从图 16 水位分布曲线对比中，采用奇异点元法在简化计算的同时精度方面也可以保持较高的水平。无论是 20 倍井径还是 100 倍井径水头分布基本与常规模型一致，体现了简化模型对网格尺寸依赖度小的优点，流量方面误差在 5%以内。



(a) 标准工况　　(b) 暴雨工况

图 16　标准工况和暴雨工况平面图水位分布曲线
Fig.16　Water level distribution curves in plan view of standard working condition and heavy rain working condition

6　结　论

（1）推导的任意线性四面体单元显式修正公式具有一般适用性。可以实现将半球面降维成点源，在不失全局精度的条件下用大网格对点源进行模拟，提高了计算效率。

（2）通过三维井常规方法和奇异点元法的水头分布对比，奇异点元法对网格尺寸依赖度小，井周外第 2 圈及以外节点水头值与理论解吻合，具有高效率和高精度的优点，在群井的情况下精度依然很高。

（3）奇异点元法流量计算几乎不受单元尺寸影响，不同网格尺寸下与解析解误差基本在 5%范围内，比同尺度的常规方法流量计算精度高，适用于单元尺寸大于 5 倍井径的情况，能够满足实际工程大网格尺寸划分要求。

（4）奇异点元法的适用范围在井与模型边界间距或井与井间距大于井径 5 倍以上，在适用范围内计算流量误差影响收敛至 ± 5%以内。

（5）通过某地下结构排水减压工程案例分析，采用奇异点元法进行降水计算，与实测结果较为吻合，符合工程规律。

参 考 文 献

[1] GUREGHIAN A B, YOUNGS E G. The calculation of steady-state water-table heights in drained soils by means of the finite-element method[J]. **Journal of Hydrology**, 1975, 27(1-2): 15-32.

[2] 曹洪, 张挺, 陈小丹, 等. 多层强透水地基渗流计算的应用研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(7): 1185-1190.
CAO Hong, ZHANG Ting, CHEN Xiao-dan, et al. Application of seepage calculation for multi-layered strongpermeable soil[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(7): 1185-1190.

[3] LUO G Y, HONG C. Using zero-thickness elements to simulate suspended cut-off walls in a regional seepage field[J]. **Computers and Geotechnics**, 2006, 33(6-7): 305-315.

[4] LUO G, CAO H. An element for modeling potential channel flows between impervious underground structures in an urban regional groundwater flow field[J]. **Hydrogeology Journal**, 2012, 20(2): 313-323.

[5] 曹洪, 骆冠勇, 廖建三, 等. 广州城区地下空间开发对地下水环境的影响研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(增刊 2): 3347-3356.
CAO Hong, LUO Guan-yong, LIAO Jian-san, et al. Study on impaction of underground space development on groundwater environment in Guangzhou city[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(Suppl. 2): 3347-3356.

[6] HU J, KE H, CHEN Y M, et al. Analytical analysis of the leachate flow to a horizontal well in dual-porosity media[J]. **Computers and Geotechnics**, 2021, 134(8): 104105.

[7] DAVIAU F, MOURONVAL G, BOURDAROT G, et al. Pressure analysis for horizontal wells[J]. **SPE Formation Evaluation**, 1988, 3(4): 716-724.

[8] OZKAN E, RAGHAVAN R, JOSHI S D. Horizontal well pressure analysis[J]. **SPE Formation Evaluation**, 1989, 4(4): 567-575.

[9] GOODE P A, THAMBYNAYAGAM R K M. Pressure drawdown and buildup analysis of horizontal wells in anisotropic media[J]. **SPE Formation Evaluation**, 1987, 2(4): 683-697.

[10] FIPPS G, SKAGGS R W, NIEBER J L. Drains as a boundary condition in finite elements[J]. **Water Resources Research**, 1986, 22(11): 1613-1621.

[11] DOTLIĆ M, VIDOVIĆ D, POKORNI B, et al. Second-order accurate finite volume method for well-driven flows[J]. **Journal of Computational Physics**, 2016, 307: 460-475.

[12] DIMKIĆ M, PUŠIĆ M, VIDOVIĆ D, et al. Numerical model assessment of radial-well aging[J]. **Journal of Computing in Civil Engineering**, 2011, 25(1): 43-49.

[13] BERRONE S, GRAPPEIN D, SCIALò S. 3D-1D coupling on non conforming meshes via a three-field optimization based domain decomposition[J]. **Journal of Computational Physics**, 2022, 448: 110738.

[14] LAURINO F, ZUNINO P. Derivation and analysis of coupled PDEs on manifolds with high dimensionality gap arising from topological model reduction[J]. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, 2019, 53(6): 2047-2080.

[15] MAI T H, SCHNEPF A, VEREECKEN H, et al. Continuum multiscale model of root water and nutrient uptake from soil with explicit consideration of the 3D root architecture and the rhizosphere gradients[J]. **Plant and Soil**, 2019, 439(1-2): 273-292.

[16] ZHOU Z, CUI C, ZHENG D, et al. Transient productivity analysis and completion parameter optimization of perforating herringbone wells[J]. **ACS Omega**, 2023, 8(20): 17841-17855.

[17] KOCH T. Projection-based resolved interface 1D-3D mixed-dimension method for embedded tubular network systems[J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2022, 109: 15-29.

[18] KOCH T, HELMIG R, SCHNEIDER M. A new and consistent well model for one-phase flow in anisotropic porous media using a distributed source model[J]. **Journal of Computational Physics**, 2020, 410: 109369.

[19] 毛昶熙. 井孔与井列的渗流数值计算[J]. 岩土力学, 2002, 23(3): 257-262.
MAO Chang-xi. Numerical computation of seepage flow for wells and well row[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(3): 257-262.

[20] 关锦荷, 刘嘉炘, 朱玉侠. 用排水沟代替排水井列的有限单元法分析[J]. 水利学报, 1984, 15(3): 10-18.
GUAN Jin-he, LIU Jia-xin, ZHU Yu-xia. Finite element analysis for an array of wells replaced by a drainage ditch[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1984, 15(3): 10-18.

[21] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1990.
MAO Chang-xi. Seepage computation analysis and control[M]. 2nd ed. Beijing: China Water & Power Press, 2003.

[22] 李祖贻, 陈平. 有限单元法计算井的渗流对奇异点的处理[J]. 水利学报, 1984, 15(5): 41-50.
LI Zu-yi, CHEN Ping. Singularity adjustment of wells in seepage field calculated by FEM[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1984, 15(5): 41-50.

[23] 曹洪, 尹小玲, 张挺. 水平面渗流有限元计算中减压井点处理[J]. 水利学报, 2003, 34(4): 74-79.
CAO Hong, YIN Xiao-ling, ZHANG Ting. Relief-wellpoint adjustment in finite element method for 2D seepage in horizontal plane[J]. **Journal of Hydraulic**

Engineering, 2003, 34(4): 74-79.

[24] 苑莲菊. 工程渗流力学及应用[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2001.
YUAN Lian-ju. Engineering seepage mechanics and applications[M]. Beijing: China Building Materials Press, 2001.

[25] 陈崇希, 唐仲华. 地下水流动问题数值方法[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 1990.
CHEN Chong-xi, TANG Zhong-hua. Numerical methods for groundwater flow problems[M]. Wuhan: China University of Geosciences Press, 1990.

[26] 宋新江, 钱财富, 吴世余. 渗流场有限元计算中排水井的处理方法[J]. 岩土力学, 2011, 32(7): 2162-2170.
SONG Xin-jiang, QIAN Cai-fu, WU Shi-yu. Treating drainage well boundary in seepage field calculation by finite element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(7): 2162-2170.

[27] 骆冠勇, 潘泓. 结合 Bathe 算法及 Signorini 条件求解饱和−非饱和无压渗流问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(11): 2275-2282.
LUO Guan-yong, PAN Hong. Using bathe algorithm and Signorini condition to solve unconfined saturated-unsaturated seepage problems[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2013, 32(11): 2275-2282.

上接第 2482 页

[21] ZHANG Chuang, LI Jian-zhong, HE Yong. Application of optimized grey discrete verhulst-BP neural network model in settlement prediction of foundation pit[J]. **Environmental Earth Sciences**, 2019, 78(15): 441.

[22] 于永堂, 郑建国, 张继文, 等. 基于卡尔曼滤波与指数平滑法融合模型的沉降预测新方法[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(增刊 1): 127-131.
YU Yong-tang, ZHENG Jian-guo, ZHANG Ji-wen, et al. Prediction of settlement based on fusion model of Kalman filter and exponential smoothing algorithm[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(Suppl.1): 127-131.

[23] 李涛, 杨腾宇, 刘波, 等. 基于 VMD-GRU 的地铁隧道台阶法施工地表沉降预测[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2023, 51(7): 48-54, 62.
LI Tao, YANG Teng-yu, LIU Bo, et al. Surface settlement prediction of subway tunnels constructed by step method based on VMD-GRU[J]. **Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)**, 2023, 51(7): 48-54, 62.

[24] VASWANI ASHISH, SHAZEER NOAM, PARMAR NIKI, et al. Attention is all you need[C]//Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NIPS 2017). Long Beach: [s. n.], 2017.

[25] 张文松, 姚荣涵. 基于时空特性和组合深度学习的交通流参数估计[J]. 交通运输系统工程与信息, 2021, 21(1): 82-89.
ZHANG Wen-song, YAO Rong-han. Traffic Flow parameters estimation based on spatio-temporal characteristics and hybrid deep learning[J]. **Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology**, 2021, 21(1): 82-89.